ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE 1982

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 2 heures

La méthode de Simpson consiste à prendre pour valeur approchée de

$$\int_a^b f(t)\,dt \;:\; \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

En utilisant l'approximation de $\int_a^b f(t)\,dt$ intervenant dans cette méthode, on se propose de calculer une valeur approchée de $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ où R désigne le rectangle $a \leqslant x \leqslant A$ et $b \leqslant y \leqslant B$.

1° On partage le rectangle R en quatre rectangles dont les sommets sont les neuf points, notés A_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) tels que $x_i = a + ih$, $y_j = b + kj$, i et j variant de 0 à 2, avec $h = \dfrac{A-a}{2}$ et $k = \dfrac{B-b}{2}$.

En utilisant des approximations indiquées au-dessus pour calculer

$$\int_b^B f(x, y)\,dy \quad \text{et} \quad \int_a^A f(x, y_f)\,dx$$

montrer qu'on est conduit à prendre pour valeur approchée de $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$: $\tilde{I}_1$ donnée par la formule (1).

$$\tilde{I}_1 = \frac{hk}{9}\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\lambda_{ij} f(x_i, y_j) \tag{1}$$

λ_{ij} est l'élément de la ligne $i + 1$ et de la colonne $j + 1$ de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2° *a.* Calculer la valeur exacte de $I = \iint_R \dfrac{dx\,dy}{1 + y\cos x}$.

R désigne l'ensemble des points M de coordonnées x et y vérifiant

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$$

(Pour calculer la valeur exacte de I, on pourra commencer par intégrer par rapport à la variable x et utiliser le changement de variable $x = 2\,\text{Arc tg}\,t$.)

b. Donner la valeur approchée $\tilde{I}_1$ de I obtenue à l'aide de (1); les valeurs de $f(x_i, y_j)$ utilisées seront données dans un tableau. On donnera huit décimales, la dernière étant arrondie.

c. En utilisant a et b, préciser l'ordre de grandeur de l'erreur due à la méthode.

3° On partage maintenant le rectangle R en 16 rectangles, en introduisant les points A_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) tels que

$$x_i = a + ih \quad y_j = b + jk \quad \text{avec} \quad h = \frac{A-a}{4} \quad \text{et} \quad k = \frac{B-b}{4}$$

i et j variant de 0 à 4, on est conduit à prendre pour valeur approchée de $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$, $\tilde{I}_2$ donnée par la formule (2).

$$\tilde{I}_2 = \frac{hk}{9}\sum_{i=0}^{4}\sum_{j=0}^{4}\lambda_{ij} f(x_i, y_j) \tag{2}$$

λ_{ij} désigne l'élément de la ligne $i + 1$ et de la colonne $j + 1$ d'une matrice A à déterminer.

a. Appliquer (2) pour calculer une nouvelle valeur approchée de

$$\iint_R \frac{dx\,dy}{1 + y\cos x}.$$

b. Préciser l'ordre de grandeur de l'erreur de méthode.

Les calculs seront faits avec huit décimales, la dernière étant arrondie; les valeurs de $f(x_i, y_j)$ intervenant seront données dans un tableau.

FIN

-494-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail